Esercizi sul “*Calcolo geometrico*” di G. Peano, nel piano.

AVVERTENZA

Dato il tripunto $ABC$, la sua area (con segno) sarà indicata con $[ABC]$, avendosi ovviamente:

(1) $[ABC] = [BCA] = [CAB] = -[BAC] = -[ACB] = -[CBA]$.

Il *prodotto regressivo* di due bipunti $AB$ e $PQ$ è il punto $X$, intersezione delle due rette determinate dai bipunti. Il punto $X$ intersezione è dato da:

(2) $X = A\cdot[BPQ] - B\cdot[APQ] = P\cdot[QAB] - Q\cdot[PAB]$.

(Osservazione). Si verifica che si ha:

(3) $[ABX] = [PQX] = 0$.

**Teorema di Menelao.**

Si abbia nel piano un triangolo di vertici $A$, $B$, $C$, e sia data una retta $r$, non passante per alcun vertice, e determinata come congiungente di due punti distinti, $U$, $V$. Siano $C'$, $A'$, $B'$ i punti di intersezione tra la $r$ ed i lati $AB$, $BC$, $CA$ rispettivamente. Il classico *Teorema di Menelao* afferma che $AC'\cdot BA'\cdot CB' = BC'\cdot CA'\cdot AB'$.
Ovvero, in termini di rapporto semplice di tre punti, si ha che $(ABC')\,(BCA')\,(CAB') = 1$.
Ora, si ottiene per la (2):

(4)
$$\begin{aligned} C' &= A\cdot[UVB] - B\cdot[UVA],\\ A' &= B\cdot[UVC] - C\cdot[UVB],\\ B' &= C\cdot[UVA] - A\cdot[UVC]. \end{aligned}$$

Dalle (4), ricordando che $AA = 0$ e le altre proprietà, si trae:

(5)
$$\begin{aligned} AC' &= -AB\cdot[UVA] \;;\quad BC' = BA\cdot[UVB] \;;\quad (ABC') = [UVA]/[UVB]\\ BA' &= -BC\cdot[UVB] \;;\quad CA' = CB\cdot[UVC] \;;\quad (BCA') = [UVB]/[UVC]\\ CB' &= -CA\cdot[UVC] \;;\quad AB' = AC\cdot[UVA] \;;\quad (CAB') = [UVC]/[UVA]. \end{aligned}$$

Da cui immediatamente si ottiene il teorema di Menelao.

**Teorema di Ceva (1678).**

Sia dato nel piano del triangolo $ABC$ un punto $O$, non giacente su alcun lato del triangolo stesso. Siano $A'$, $B'$, $C'$ le intersezioni dei lati del triangolo con le rette $AO$, $BO$, $CO$ rispettivamente. Il (classico) teorema di Ceva afferma che $(AC'/C'B)\,(BA'/A'C)(CB'/B'A) = 1$, ovvero, in termini di rapporti semplici di tre punti, $(ABC')(BCA')(CAB') = -1$.

Ora, si ha ancora per le (2):

(6)
$$\begin{aligned} A' &= C\cdot[AOB] - B\cdot[AOC]\\ B' &= A\cdot[BOC] - C\cdot[BOA]\\ C' &= B\cdot[COA] - A\cdot[COB]. \end{aligned}$$

Quindi:

(7) $BA' = BC\cdot[AOB]$;  $CA' = -CB\cdot[AOC]$;  $CB' = CA\cdot[BOC]$; $AB' = -AC\cdot[BOA]$;  $AC' = AB\cdot[COA]$;
$BC' = -BA\cdot[COB]$;
$(BCA') = [AOB]/[AOC]$;  $(CAB') = [BOC]/[BOA]$;  $(ABC') = [COA]/[COB]$.

E infine, ricordando le (1), si ottiene appunto il teorema di Ceva, ovvero:

(8) $$(ABC')(BCA')(CAB') = -1.$$

OSSERVAZIONE. Le procedure simboliche di Peano si prestano a trattare elegantemente la geometria affine. Ma diventano complicate quando si tratta di introdurre qualche nozione metrica. È possibile tuttavia costruire un invariante metrico-proiettivo come il *birapporto* di quattro elementi di una forma geometrica di prima specie senza far ricorso al calcolo geometrico di Peano, e solo ricorrendo alle notazioni tradizionali. Ricordando la definizione di *rapporto semplice* di tre punti di una retta:

(9) $(ABC) = AC/BC$, e posto $(ABC) = k$, si ha:

(10) $(BAC) = \frac{1}{k}$; $(ACB) = 1-k$; $(BCA) = \frac{k-1}{k}$; $(CBA) = \frac{k}{k-1}$; $(CAB) = \frac{1}{1-k}$.

Siano ora date nel piano due rette, *r* ed *r'*, e sia *O* il loro punto comune; sia poi *V* un punto del piano non giacente su alcuna delle rette e siano *a*, *b*, *c* tre rette per *V*, che intersecano *r* ed *r'* in tre punti *A, B, C, A', B', C'* rispettivamente. Dal Teorema di Menelao applicato al triangolo *OAA'*, rispetto alla trasversale <*V B B'*>, si ha: $(AA'V)(A'OB')(OAB) = 1$, ossia:

(12) $$(A'AV) = (A'OB')(OAB).$$

Con procedura analoga, applicata allo stesso triangolo *OAA'*, rispetto alla trasversale <*VCC'*> si ottiene (semplicemente sostituendo nella (12) *C* e *C'* al posto di *B* e *B'*):

(13) $(A'AV) = (A'OC')(OAC)$, da cui

(14) $(OAB)(A'OB') = (OAC)(A'OC')$, da cui applicando le (10):

(15) $$(OAB)/(OAC) = (OA'B')/(OA'C').$$

Infine esplicitando i simboli dei rapporti semplici attraverso il simbolo di *birapporto*:

(16) $$(OABC) = (OA'B'C').$$

La relazione precedente viene tradizionalmente presentata con parole prendendo in considerazione la corrispondenza che lega i punti come *A* ed *A'*, *B* e *B'*, *C* e *C'* allineati a coppie con *V*; tale corrispondenza viene chiamata "*proiezione*", e di conseguenza la validità della relazione (16) viene presentata con l'enunciato: "*Se due quaterne di punti O, A, B, C; O, A', B', C', che appartengono a due rette r ed r' intersecantisi in O, vengono proiettate l'una sull'altra da un vertice V (che sta fuori di r e di r'), i loro birapporti hanno lo stesso valore*".
Conseguentemente si suole anche dire che "*il birapporto di due quaterne di punti che si trovano nelle condizioni sopra descritte è un "invariante" delle quaterne, rispetto alla operazione di proiezione".*

Sia ora $d$ una quarta retta per $V$, e siano $D$ e $D'$ le sue intersezioni con $r$ ed $r'$. I due birapporti ($ODCB$) e ($ODCA$) sono pure invarianti per proiezione, e dalle formule che definiscono il birapporto si ottiene:

(17) $$(ODCB)/(ODCA) = (ODAB).$$

Dalle proprietà del birapporto si ha:

(18) $$(ODAB) = (ABOD),$$

birapporto che è pure invariante per proiezione. In modo analogo si dimostra che è invariante per proiezione il birapporto ($ABOC$); si giunge quindi a concludere che anche il birapporto

(19) $$(ABCD) = (ABOD)/(ABOC)$$

è invariante per proiezione. Possiamo quindi enunciare il Teorema (detto "*di invarianza*").

**Teorema.** *Date quattro rette a, b, c, d di un medesimo fascio, e due rette r ed r', sono uguali tra loro i birapporti delle quaterne di punti che si ottengono secando le quattro rette con r ed r' rispettivamente*.

Convenzione. Se una retta secante è parallela ad una retta del fascio, ad esempio $d$, daremo al birapporto il valore del rapporto semplice ($ABC$). Ciò permette di enunciare la seguente

Definizione. Date in un piano quattro rette, $a$, $b$, $c$, $d$ appartenenti ad un medesimo fascio, chiameremo "*birapporto delle quattro rette*", ed indicheremo col simbolo

(20) $$(a\ b\ c\ d)$$

il birapporto dei quattro punti che si ottengono intersecando le rette con una qualunque retta $r$ del piano, non passante per il centro del fascio.

Osservazione. Se le rette del fascio sono tutte parallele tra loro, la dimostrazione del teorema di invarianza si ottiene con considerazioni elementari.

PROPRIETÀ DEL BIRAPPORTO DI QUATTRO PUNTI SU UNA RETTA.

Dalla definizione

(21) $$(ABCD) = (ABC)/(ABD),$$

si ottengono le uguaglianze

(22) $(ABCD) = AC\cdot BD/AD\cdot BC = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$. Posto poi $(ABCD) = k$, si ha:

(23) $$(ABDC) = \frac{1}{k} \quad ; \quad (ACBD) = 1 - k.$$

La prima relazione ha verifica immediata. Per quanto riguarda la seconda si ha:

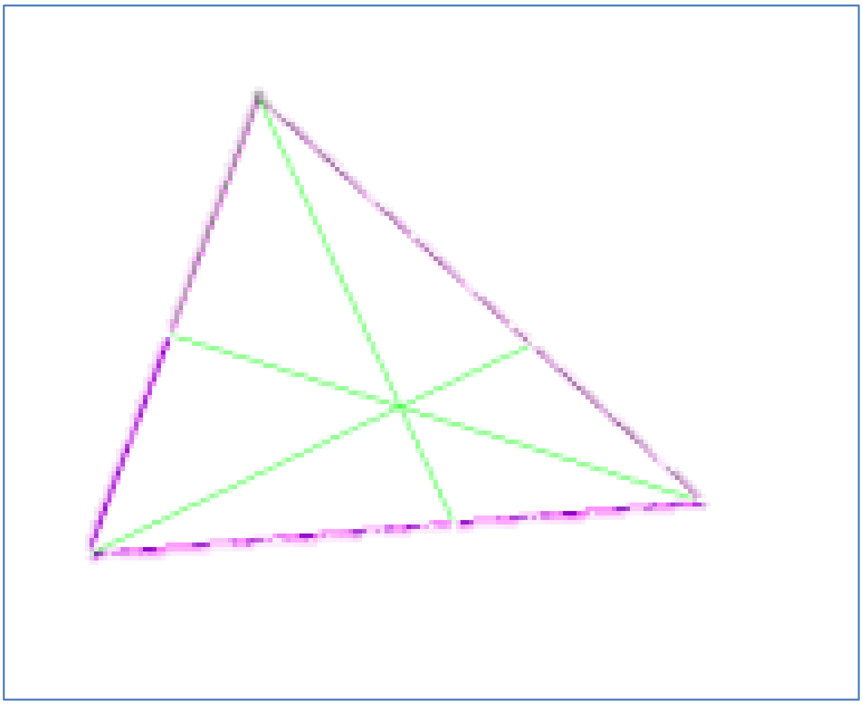
(24) $(ACBD) = AB\cdot CD/AD\cdot CB$; si ha poi

(25) $AB\cdot CD = (AD + DB)\cdot(CB + BD) = AD\cdot CB + AD\cdot BD + DB\cdot CB + DB\cdot BD =$
$AD\cdot CB + BD\cdot(AD + BC + DB) = AD\cdot CB + BD\cdot AC$.

Questo risultato, diviso per $AD\cdot CB$ e confrontato con la (21) dà la (23).

Dalle (21) e (23) si trae che il birapporto di quattro punti su di una retta può avere i seguenti 6 valori, dipendentemente dall'ordine in cui i punti stessi sono enunciati nel simbolo:

(26) $$k,\ 1/k,\ 1 - k,\ \ (k-1)/k,\ 1/(1-k),\ k/(k-1).$$



ABC C'A'B'

TEOREMA DI CEVA (*seconda dimostrazione*).

Siano nel piano quattro punti indipendenti: *A*, *B*, *C*, *O*. Siano *A'* l'intersezione del lato *BC* del triangolo *ABC* con la retta < *AO* >, *B'* e *C'* le intersezioni dei lati *CA* e *AB* con le rette <*BO* > e <*CO* > rispettivamente. Il Teorema di Ceva afferma che (*ACB'*) (*CBA'*) (*BAC'*) = -1.

Applicando il teorema di Menelao al triangolo *ABA'* rispetto alla trasversale <*CC'*> si ha:

(27) $(BA'C)\,(A'AO)\,(ABC') = 1.$

Analogamente applicando il teorema di Menelao al triangolo *AA'C* rispetto alla trasversale < *BO*> si ottiene:

(28) $(AA'O)\,(A'CB)\,(CAB') = 1.$

Ricordando che $(A'AO) = 1/(AA'O)$, dalle (27) e (28) si ottiene

(29) $1/((A'CB)(CAB')) = (ABC')\,(BA'C)$

e di qui, esplicitando le espressioni e facendo le riduzioni:

(30) $(AB' \cdot BC' \cdot A'C)/(A'B \cdot CB' \cdot AC') = -1$,

da cui il Teorema di Ceva nella forma $(ACB')\,(CBA')\,(BAC') = -1$, e anche

(31) $(ABC')\,(BCA')\,(CAB') = -1$.

OSSERVAZIONE. La condizione (31) è necessaria perché le tre rette $<AA'>$, $<BB'>$, $<CC'>$ (dette *rette ceviane*) passino per $O$; si dimostra facilmente (per assurdo) che essa è anche sufficiente.